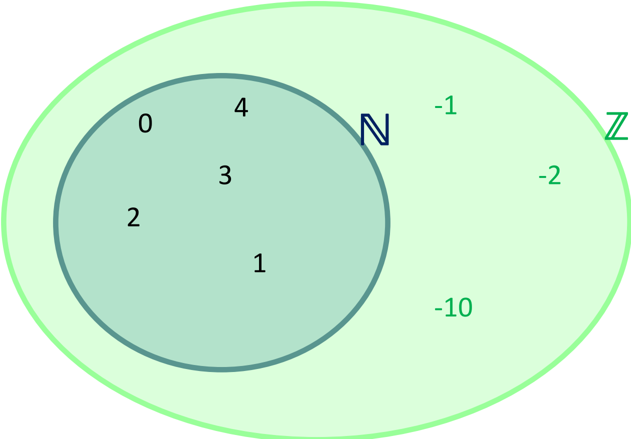
Multiples et Diviseurs

Fiche établie d'après le web-cours de Mr Chermak du 04.09.2013, Complétée par des recherches internet à partir de Google

Rappels

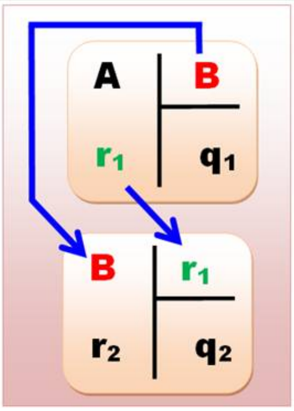
$\mathbb{N}$ ce sont les entiers naturels

$\mathbb{Z}$ ce sont les entiers relatifs



ALGORITHME D'EUCLIDE

- Il s'agit de divisions en cascade: les résultats de l'une servent à poser la suivante:
  - Le diviseur *B* devient le dividende; et
  - Le reste r_1 devient le diviseur.
- Arrêt lorsque le reste de la division est nul.
- Le reste trouvé avant le reste nul est le PGCD.



Disposition pratique

- Au lieu de mettre le quotient q en bas, on le place au-dessus du diviseur de manière à laisser la place au reste de la division suivante.

Principe et exemple

	q_1	q_2	q_3	…	q_n
A	B	r_1	r_2	…	PGCD
r_1	r_2	r_3	…	0	

	1	6
21	18	3
3	0	
Explications	21 / 18 = 1, reste 3	18 / 3 = 6, reste 0

Exemple complet expliqué

Calcul du PGCD

	8	4	1	2
33 810	4 116	882	588	294
882	588	294	0	

Explication

33 810 / 4 116 = 8 reste 882
882 en bas — 8 en haut — 882 à la suite

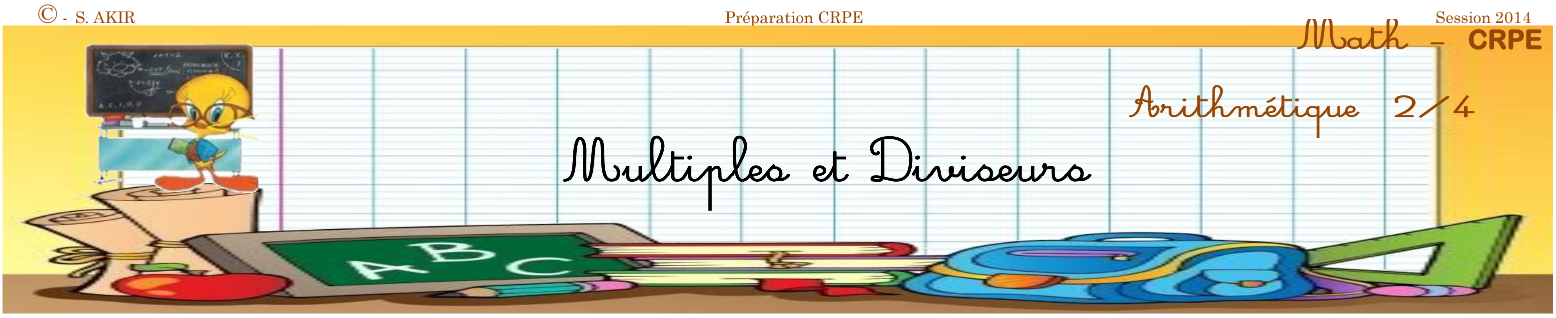
4 116 / 882 = 4 reste 588
588 en bas — 4 en haut — 588 à la suite

882 / 588 = 1 reste 294
294 en bas — 1 en haut — 294 à la suite

588 / 294 = 2 reste 0
0 en bas — 294 : PGCD

PGCD (33 810, 4 116) = 294

A = 33 810 = 1 x 2 x 3 x 5 x 7 x 7 x 23
B = 4 116 = 1 x 2 x 3 x 7 x 7 x 7
PGCD (A, B) = 1 x 2 x 3 x 7 x 7 = 294



Multiples d'un nombre entier naturel

Définition

Un nombre entier naturel **a** est multiple d'un nombre entier naturel **b** s'il existe un nombre entier **k** tel que **a = k x b**

- 24 36 48 sont des multiples de 3

24 est multiple de 3 car il existe un entier k (8)
Car 24 = 8 x 3

- Tout entier naturel **n** est multiple de 1

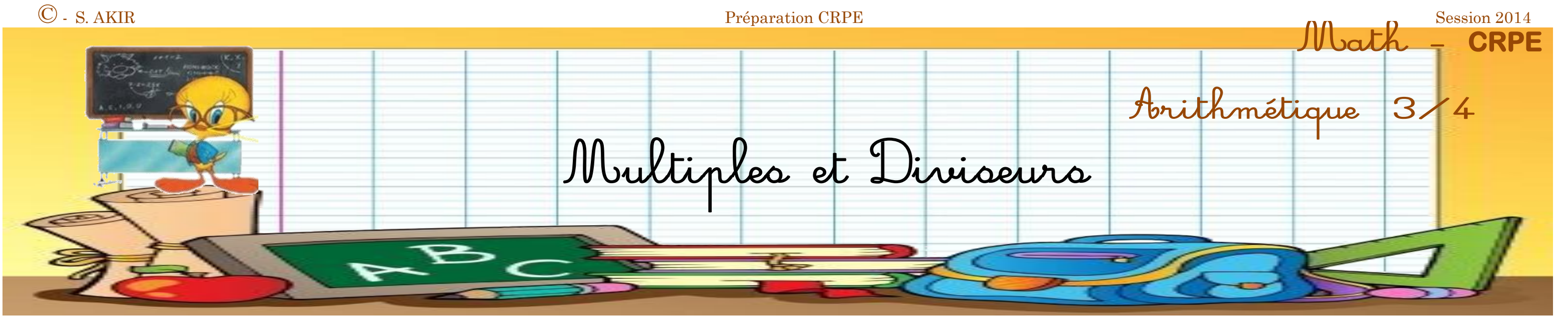
Parce que **n** = 1 x **n**

- Tout entier naturel **n** est multiple de lui-même

Parce que **n** = **n** x 1

- 0 est multiple de tout entier naturel

Car 0 = **n** x 0
0 est un élément absorbant



Théorèmes

Si les entiers naturels **a** et **b** sont multiples de **c** alors **a + b** est aussi multiple de **c**

- Si 4 et 32 sont des multiples de 2
  Alors 4+32 est un multiple de 2

- **a** est multiple de **c** $\Rightarrow$ **a = k x c**
  b est multiple de **c** $\Rightarrow$ **b = k' x c**

$$\left.\begin{array}{l} a = k \times c \\ b = k' \times c \end{array}\right\} \quad a + b = kc + k'c \Rightarrow a + b = c\,(k + k')$$

Si **a** est multiple de **b** et si **b** est multiple de **c** alors **a** est multiple de **c**

- $$\left.\begin{array}{l} a = k \times b \\ b = k' \times c \end{array}\right\} \text{ Alors } \begin{array}{l} a = k \times (k'c) \\ a = (k \times k') \times c \end{array}$$

Diviseur d'un nombre entier naturel

Définition

Un nombre entier naturel **a** est divisible par un nombre entier naturel **b** non nul si et seulement s'il existe un nombre entier **q** tel que **a = b x q**

Multiples et Diviseurs

- **a** est divisible par **b** équivaut à dire **b** divise **a** ou encoure **a** est un multiple de **b.**

- **b'** est l'inverse de **b** car **bb' = 1**

  3 et $\frac{1}{3}$ sont inverse l'un de l'autre car $3 \times \frac{1}{3} = 1$

- L'inverse de 0 n'existe pas

- Pour diviser un nombre par un autre il faut multiplier le premier par l'inverse de l'autre $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Théorèmes

> Si **c** est un diviseur de **a** et **b** alors **c** est forcément un diviseur de **a + b**

> Si **a** est un diviseur de **b** et que **b** est un diviseur de **c** alors **a** est un diviseur de **c**