Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Fiche établie d'après l'e-learning ForProf **CRPE** Master Juin 2013, « Réussir les mathématiques » Dunod, Paris 2012, et recherches internet à partir de Google

Les Fonction

On appelle fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles), tout processus qui à tout réel x de I associe un unique réel y

on note : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

y est appelé l'image de x (elle est unique)

$x \longmapsto y = f(x)$

x est un antécédent de y (un nombre peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents selon les cas)

On note C la représentation graphique de la fonction f dans un repère (en général orthogonal)

Dans un repère, C_f est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'égalité $y = f(x)$ appelée équation de C_f

Sens de variation d'une fonction

f est croissante sur I si pour tout élément a de I et tout élément b de I

$a \leqslant b$ implique $f(a) \leqslant f(b)$

f est décroissante sur I si pour tout élément a de I et tout élément b de I

$a \leqslant b$ implique $f(a) \geqslant f(b)$

f est croissante I si pour tout élément a de I et tout élément b de I

$f(a) = f(b)$

Une fonction monotone est une fonction qui est soit croissante, soit décroissante

- Technique d'étude du sens de variation d'une fonction
  - Lecture graphique

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

- Etude du signe de $f(x) - f(x')$: si $f(x) - f(x')$ est du même signe que $x - x'$, alors f est croissante, s'il est de signe contraire alors f est décroissante

Fonctions de référence

- Fonction affines

On dit qu'une fonction f est une fonction affine si elle est définie pour tous x par $f(x)$=ax + b (où a et b sont des réels fixés)

Dans ce cas, sa représentation graphique est la droite d'équation y=ax + b (a est le coefficient directeur de la droit et b sont ordonnée à l'origine)

Si a < 0 f est croissante sur $\mathbb{R}$

Si a > 0 f est croissante sur $\mathbb{R}$

Si a = 0 la fonction affine f est constante et la droite qui la représente est parallèle à l'axe des abscisses.

Si b = 0 la fonction affine f est appelée fonction linéaire et la droite qui la représente passe par l'origine du repère.

Fonction affine = c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un réel x, fait correspondre le réel $f(x)=ax$, a étant un réel donné. Cette fonction est croissante si a est positif, décroissante si a est négatif, constante si a est nul. Sa représentation graphique est une droite d'équation $y = ax+b$, a portant alors le nom de coefficient directeur de la droite et b étant l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.

- Fonction polynômes de degré 2

On dit qu'une fonction f est une fonction polynôme de degré 2 si elle est définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où a, b et c sont des réels fixés, a étant non nul)

Dans ce cas sa représentation graphique est appelée parabole

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Proportionnalité et modèle mathématique

Le modèle mathématique de la proportionnalité est la fonction linéaire

Fonction linéaire = c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un réel ***x***, fait correspondre le réel $f(x)=ax$, a étant un réel donné non nul. Le sens de la variation de cette fonction est le même que celui de la fonction affine précédente : elle est croissante si a est positif, décroissante si a est négatif. La représentation graphique est une droite d'équation $y = ax$ qui passe par l'origine des coordonnées.

Quand on met en relation deux grandeurs pour lesquelles on dispose d'une série de mesures x_1, x_2, x_3, … pour la première et y_1, y_2, y_3, … pour la seconde, la numérotation étant faite de telle sorte que chaque y_i soit en correspondance avec x_i, on peut conclure à une situation de proportionnalité si on peut déterminer un nombre k tel que

$$y_1 = k \times x \text{ ; } \dots.$$

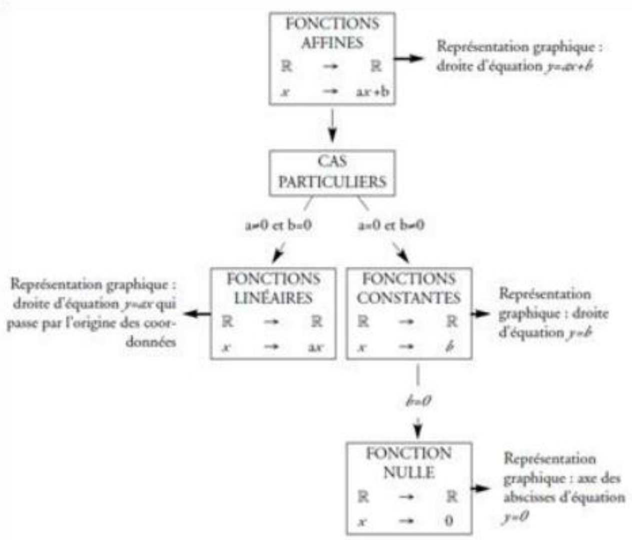
Dans ce cas la mesure y de la seconde grandeur est une fonction linéaire de la mesure x de la première grandeur, autrement dit

$$y = f(x) = k \times x$$

Le nombre k est appelé coefficient de proportionnalité.

Si la seconde grandeur est proportionnelle à la première la premières est proportionnelle à la seconde et le coefficient de proportionnalité entre la seconde et la première est $\frac{1}{k}$

En résumé :



- **Propriétés de linéarité**

Si f est une fonction linéaire alors elle vérifie deux propriétés :

- P1 (propriété additive de linéarité) : $f(x + x') = f(x) + f(x')$ –

  Par une fonction linéaire, l'image de la somme des deux nombres est la somme de leurs images

- P2 (propriété multiplicative de linéarité ou multiplication scalaire ou propriété d'homogénéité) : pour tout t réel (on dit aussi que t est un scalaire) $f(t \times x) = t \times f(x)$ –

  Par une fonction linéaire, l'image du produit d'un nombre par un réel est le produit de l'image de ce nombre par ce réel.

- **Représentation graphique d'une fonction linéaire**

On représente graphiquement dans un repère un problème de proportionnalité associant les mesures x_1, x_2, x_3, aux mesures y_1, y_2, y_3, en plaçant les points de coordonnées $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$, $(x_3 ; y_3)$. Comme la fonction qui associe x à y est linéaire, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Les points sont donc alignés avec l'origine du repère.

Techniques de résolution d'un problème de proportionnalité

- **Utilisation des propriétés de linéarité**

d4 m9

Durée (en min)	16	4	36
Distance (en km)	40	10	90

Ainsi, si nous désignons par *f* la fonction linéaire associée, nous avons

f(4) = f(16 :4) = f(16) : 4 = 40 : 4 = 10 puis, *f(36) = f(4x9) = f(4)x9 = 10x9 = 90*

ou m $\frac{36}{16}$

Durée (en min)	16	36
Distance (en km)	40	90

$$f(36) = f\left(16 \times \frac{36}{16}\right) = f(16) \times \frac{36}{16} = 40 \times \frac{36}{16} = 90$$

Les différents coefficients ¼ , 9, 36/16 sont des coefficients multiplicatifs ou scalaires.

iser par 4 revient à multiplier par ¼)

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

➢ Règle de trois c'est-à-dire passage par la valeur unitaire

		d16	m36
Durée (en min)	16	1	36
Distance (en km)	40	$\frac{40}{16}$	$\frac{40}{16}$ x36=90

f(1) = f(16 :16) = f(16) : 16 = 40 : 16 = 40/16

f(36) = f(1x36) = 36xf(1) = 36 x 40/16 = 90

➢ Utilisation du coefficient de proportionnalité

Durée (en min)	16	36
Distance (en km)	40	36x $\frac{40}{16}$ =90

m $\frac{40}{16}$

La fonction linéaire sous-jacente est la fonction définie par $f(x) = \frac{40}{16} \times x$

Ce qui peut poser problème dans cette procédure c'est l'interprétation du coefficient de proportionnalité. Cette technique est particulièrement efficace quand il y a de nombreuses valeurs à calculer tant pour la seconde grandeur que pour la première

➢ Utilisation de légalité des produits en croix

Durée (en min)	16	36
Distance (en km)	40	x

16 x *x = 40 x 36*

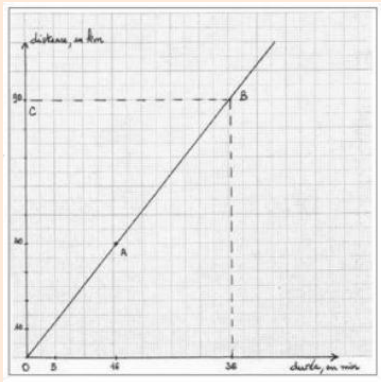
x = (40 x 36) / 16 = 90

Si k est le coefficient de proportionnalité on a k = $\frac{c}{a} = \frac{x}{b}$, les règles de calcul sur les fractions donnent : x = b x$\frac{c}{a} = \frac{b \, x \, c}{a}$

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

➢ Utilisation de la représentation graphique

Traçons la demi-droite [OA] avec A de coordonnées (16 ;40). La parallèle à [Oy) menée par le point d'abscisse 36 coupe [OA] en B.
La parallèle à [Ox) menée par B coupe l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée 90.



Une proportion

C'est l'égalité de deux rapports

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a, b, c et d sont des nombres réels et b et d ne sont pas nuls

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ réduction au même dénominateur $\Rightarrow ad = bc$

Ceci démontre le théorème :

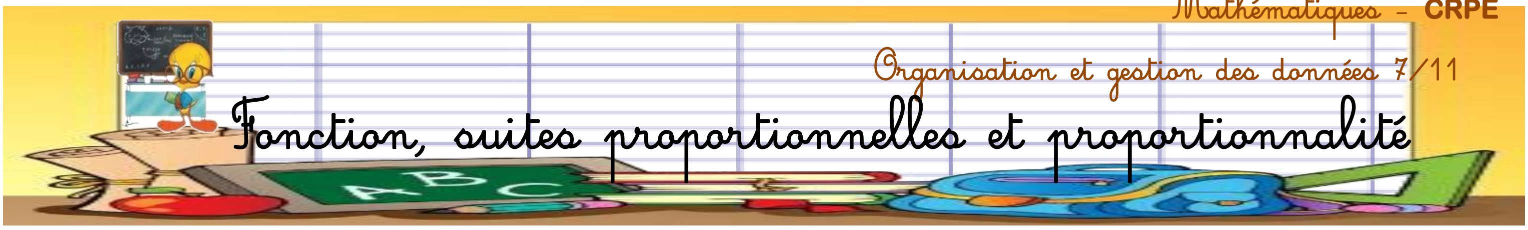
Dans une proportion les produits en croix sont égaux

Suites proportionnelles

Suites directement proportionnelles

Deux suites de réels ayant le même nombre d'éléments (a, b, c, d) et (e, f, g, h) sont directement proportionnelles si

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{f} = \frac{c}{g} = \frac{d}{h}$$



Suites inversement proportionnelles

Deux suites (x, y, z) et (t, u, v) sont inversement proportionnelles si les deux suites (x, y, z) et $\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right)$ sont directement proportionnelles

$$\frac{x}{\frac{1}{t}} = \frac{y}{\frac{1}{u}} = \frac{z}{\frac{1}{v}} \quad \text{soit par extension } xt = yu = zv$$

Propriétés des suites de rapports égaux

Hypothèse $\left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \right.$ Conclusion $\left\{ \frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f} \right.$

Désignons par k la valeur commune des 3 rapports égaux donnés en hypothèse

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ soit $a = bk$, $c = dk$ et $e = fk$

Ainsi $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{bk+dk+fk}{b+d+f} = \frac{k(b+d+f)}{b+d+f} = k = \frac{a}{b}$

Théorème

À partir d'une suite de rapports égaux, nous obtenons un nouveau rapport égal à chacun d'eux, ce nouveau rapport ayant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs

Tableau de proportionnalité

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
aX_1	aX_2	aX_3	aX_4	aX_5

Multiplier par a

Les nombres de la deuxième ligne sont obtenus en multipliant par a ceux de la première ligne. a s'appelle le coefficient de proportionnalité

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Reconnaître si une situation est uen situation de proportionnalité

1. Situation de proportionnalité = Si on met en correspondance deux grandeurs, si lorsqu'on multiplie la première par une constante, la valeur correspondante de la seconde est multipliée par la même constante, alors les grandeurs sont proportionnelles
2. Situation de proportionnalité = On représente graphiquement le problème. Si les points sont alignés avec l'origine, alors le problème est un problème que l'on peut modéliser par une fonction linéaire
3. Situation de non-proportionnalité = s'il existe une valeur de la première grandeur pour laquelle la multiplication par un nombre t ne fait pas correspondre la deuxième grandeur multipliée par t (en terme mathématiques : il existe x et t tel que $f(t \times x) = t \times f(x)$) alors le problème n'est pas un problème de proportionnalité.
4. Situation de non-proportionnalité = On représente graphiquement le problème. Si les points ne sont pas alignés avec l'origine, alors le problème n'est pas un problème de proportionnalité

Reconnaître si une situation est uen situation de proportionnalité

Les problèmes de proportionnalité englobent des problèmes plus complexe, comme les problèmes de proportionnalité double ou inverse.

Si d est la durée en jour, n le nombre d'enfant, m la masse en kilogrammes on a $m = k \times d \times n$

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Pourcentages

Les problèmes de pourcentages sont des cas particuliers des problèmes de proportionnalité

Pourcentage exprimant une proportion

Si dans une population D d'effectif n, on a une sous-population G d'effectif k on appelle la proportion G dans D le nombre $\frac{k}{n}$

Dans une classe A il y a 11 filles et 17 garçons, dans une classe B il y a 8 filles et 15 garçons. Dans quelle classe la proportion de filles est la plus importante ?

Pour comparer des rationnels une technique revient à choisir des écritures fractionnaires de même dénominateur. Ici cela revient à se ramener à des classes A' et B' avec un effectif fictif identique, par exemple 100.

$\frac{11}{28} \approx 0.39 = \frac{39}{100}$ *et* $\frac{8}{23} \approx 0.34 = \frac{34}{100}$ La proportion de filles dans la classe A est plus importante que dans la classe B.

Convention d'écriture : le nombre $\frac{t}{100}$ est noté t% et se lit t pour cent

- Calcul d'un taux de pourcentage
  - Déterminer une valeur approchée décimale de la proportion et exprimer le décimal comme une fraction décimale de dénominateur 100
  - A proportion fixe, l'effectif du caractère X est proportionnel à l'effectif total

Effectif du caractère « filles »	11	X
Effectif total	28	100

On emploie ensuite l'une des techniques de résolution d'un problème de recherche de quatrième proportionnelle

- Pourcentage de pourcentage

t% de u% d'une population revient à $\frac{t}{100} \times \frac{u}{100}$ de cette population

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Une population augmente de 2% par an. Sachant que la population initiale est de 12 000 personnes, quelle est la population au bout d'un an ? de 5 ans ?

Si n est l'effectif de la population initiale, n' celui la population finale, on a $n' = n + \frac{2}{100}\ x\ n = \left(1 + \frac{2}{100}\right) x\ n = 1.02\ x\ n$ La population finale est bien obtenue en multipliant la population initiale par une constante.

Dans un problème d'augmentation (respectivement de diminution) de t %, la grandeur après augmentation (respectivement diminution) est proportionnelle à la grandeur initiale.

Augmenter de t % c'est multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

Diminuer (réduire) de t % c'est multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

Augmenter de t % puis de u % n'est pas égal à augmenter de (t + u) % cela revient à multiplies par $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{100}}\right) \mathbf{x} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{100}}\right) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{t+u}}{\mathbf{100}} + \frac{\mathbf{t\,x\,u}}{\mathbf{10\,000}}$

Augmenter de t % puis diminuer de u % (avec t ⩾ u) n'est pas égal à augmenter de (t - u) % cela revient à multiplier par $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{100}}\right) \mathbf{x} \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{100}}\right) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{t-u}}{\mathbf{100}} + \frac{\mathbf{t\,x\,u}}{\mathbf{10\,000}}$

Fonction, suites proportionnelles et proportionnalité

Programme de l'école primaire BO n°3 19 Juin 2008
Complété par le BO du 5 Janvier 2011

Cycle 1

Approcher les quantités et les nombres

L'école maternelle constitue une période décisive dans l'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.

Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.

Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun.

À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.

La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée ; leurs performances restent variables mais il importe que chacun ait commencé cet apprentissage. L'apprentissage du tracé des chiffres se fait avec la même rigueur que celui des lettres.

Cycle 2

	Cours préparatoire	Cours élémentaire première année
Organisation et gestion des données	- Lire ou compléter un tableau dans des situations concrètes simples.	- Utiliser un tableau, un graphique. - Organiser les informations d'un énoncé.

Cycle 3

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Organisation et gestion de données	- Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution. - Utiliser un tableau ou un graphique en vue d'un traitement des données.	- Construire un tableau ou un graphique. - Interpréter un tableau ou un graphique. - Lire les coordonnées d'un point. - Placer un point dont on connaît les coordonnées. - Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.	- Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").